3. Cálculo de límites

En este punto vamos a estudiar algunos casos particulares del cálculo de límites.

3.1. Límites de funciones polinómicas cuando $x \to \pm\infty$.

El límite de un polinomio cuando $x \to \pm\infty$ es equivalente al límite del término de mayor grado, que es el infinito de orden superior. El límite es $+\infty$ o $-\infty$, según resulte de operar el signo del coeficiente principal con la potencia.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to-\infty}(-3x^2+7x-5)=\lim_{x\to-\infty}(-3x^2)=-3\cdot(-\infty)^2=-\infty$$

3.2. Límites de funciones racionales.

a) TIPO $\left[\frac{0}{0}\right]$: Límite en una raíz del numerador y del denominador. Por ser x = a raíz del numerador y del denominador, ambos son divisibles por $x-a$. Se evita la indeterminación dividiendo el numerador y el denominador por x – a.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+x^2-4x-4}{x^2+x-6}=\frac{2^3+2^2-4\cdot 2-4}{2^2+2-6}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+x^2-4x-4}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(x^2+3x+2)}{(x-2)\cdot(x+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x+2}{x+3}=\frac{2^2+3\cdot 2+2}{2+3}=\frac{12}{5}$$

b) TIPO $\left[\frac{k}{0}\right]$ Límite en una raíz solo del denominador. Por ser x = a sólo raíz del denominador, el límite es $+\infty$ o $-\infty$ y pueden ser distintos o iguales por la derecha y por la izquierda, por lo que se deben hallar los límites laterales.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x-5}{x-2}=\frac{3\cdot 2-5}{2-2}=\frac{1}{0}$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{3x-5}{x-2}=\frac{3\cdot 2^- -5}{2^- -2}=\frac{1}{0^-}=-\infty \qquad \lim_{x\to 2^+}\frac{3x-5}{x-2}=\frac{3\cdot 2^+ -5}{2^+ -2}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

c) TIPO $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ Límite de una función racional cuando $x \to \pm\infty$. Es equivalente al cálculo del límite tomando los infinitos de orden superior en el numerador y denominador. Se tiene:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}=\begin{cases} 0 & \text{si } n<m \quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x^3+x^2+4}=0 \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n=m \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^2+2x+5}{4x^2-7x+1}=\frac{-3}{4} \\ \pm\infty & \text{si } n>m \quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2}{5x+1}=\infty \end{cases}$$

Regla práctica:

- Si el grado del numerador es menor que el del denominador, el límite es cero.
- Si los grados son iguales, el límite es el cociente de los coeficientes principales.
- Si el grado del numerador es mayor que el del denominador, el límite es $+\infty$ o $-\infty$, según resulte de operar los signos de los coeficientes principales con las potencias correspondientes.

3.3. Límites de diferencia de infinitos con funciones polinómicas y racionales.

En una diferencia de infinitos, si se conoce cuál es de grado superior, el límite se calcula mentalmente. En caso contrario, se realizan operaciones algebraicas y se aplican los procedimientos conocidos.

Ejemplos:

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^3}{x-2}-x\right)=\infty-\infty=\infty$ ya que el primer infinito es de orden superior.

$\lim_{x\to\infty}\left(x+1-\frac{x^3}{x^2-2}\right)=\infty-\infty$ la indeterminación se resuelve operando algebraicamente (m.c.m.):

$$\lim_{x\to\infty}\left(x+1-\frac{x^3}{x^2-2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x-2}{x^2-2}\right)=1$$

3.4. Límites de funciones irracionales.

a) Límite de una función irracional cuando x tiende a un extremo del dominio. Cuando el índice de la raíz es par sólo existe un límite lateral.

Ejemplo:

$\lim_{x\to 2^-}\sqrt{2-x}=\sqrt{0^+}=0$

En cambio el $\lim_{x\to 2^+}\sqrt{2-x}$ no existe porque a la derecha de 2 la función no está definida.

b) Límite de una función irracional cuando x tiende a $\pm\infty$. Cuando el índice es par, puede que alguno de los límites o los dos no existan por no estar definida la función.

Ejemplo:

$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{2-x}=\infty$

En cambio $\lim_{x\to\infty}\sqrt{2-x}$ no existe porque la función no está definida en $(-\infty,2)$.

c) Diferencia de infinitos cuando $x\to\pm\infty$. En una diferencia de infinitos, si se conoce cuál es de grado superior, el límite se calcula mentalmente. En caso contrario, se multiplica y se divide por la expresión conjugada. La expresión conjugada de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ es $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ y viceversa.

Ejemplo:

$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}-x^2\right)=\infty-\infty=-\infty$ porque el segundo infinito es de orden superior.

$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\infty-\infty$ Se resuelve la indeterminación multiplicando por el conjugado:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+x\right)-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\frac{1}{2}$$

d) Indeterminación $\left[\frac{0}{0}\right]$. Se resuelve multiplicando el numerador y el denominador por el conjugado:

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{5x-6}-2}{x-2}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{5x-6}-2\right)\left(\sqrt{5x-6}+2\right)}{(x-2)\left(\sqrt{5x-6}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{5x-6-4}{(x-2)\sqrt{5x-6}+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x-10}{(x-2)\sqrt{5x-6}+2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5(x-2)}{(x-2)\sqrt{5x-6}+2}=\lim_{x\to 2}\frac{5}{\sqrt{5x-6}+2}=\frac{5}{4}$$

3.5. Límites de funciones potenciales-exponenciales.

En este tipo de funciones se puede tratar de resolver la indeterminación 1^∞ manipulando algebraicamente la expresión y recordando la definición de número *e*.

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left[f(x)\right]^{g(x)}=1^\infty \to\to\to \lim_{x\to\infty}\left[f(x)\right]^{g(x)}=e^{\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-1\right]\cdot g(x)}}$$

Ejemplo:

$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x+2}{x-3}\right]^{2x+1}=1^\infty$ se resuelve la indeterminación aplicando la fórmula anterior:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x+2}{x-3}\right]^{2x+1}=e^{\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x+2}{x-3}-1\right]\cdot(2x+1)}=e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2-x+3}{x-3}\right)(2x+1)}=e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5}{x-3}\right)(2x+1)}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{10x+5}{x-3}}=e^{10}$$